Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φροντιστηριακές ασκήσεις #6, Μάρτιος 2016, Ισομετρίες

1. Συμπληρώστε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

ώστε να είναι ορθογώνιος.

2. Έστω η απεικόνιση $\langle \cdot\,,\cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle := 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3.$$

- Δείξτε ότι η $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.
- Δείξτε οτι η γραμμική απεικόνιση $T : \left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot\,,\cdot \rangle_{can}\right) \to \left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot\,,\cdot \rangle\right)$ με τύπο

$$T(x,y,z) := \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{\sqrt{2}}, \frac{z}{2\sqrt{2}}\right),$$

όπου $\langle \cdot\,,\cdot \rangle_{can}$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$, είναι ισομετρία.

3. Να ορίσετε μια ισομετρία από τον Ευκλείδειο χώρο $\left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot\,,\cdot \rangle_{can}\right)$ στον Ευκλείδειο χώρο $\left(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot\,,\cdot \rangle\right)$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ 2 με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

4. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

παριστάνει στροφή κατά γωνία φ περί ενός άξονα $\mathcal{E}$ που περνάει από το σημείο $O = (0,0,0)$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τον άξονα $\mathcal{E}$ και την γωνία φ.

SOS και
ΦΒ-χρα
για
ίνα.

Φροντιστηριακές Ασκήσεις #6

Άσκηση 1

$$\left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1 \quad ✓$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)^2 + (0)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{4}{14} + \frac{9}{14}} = 1 \quad ✓$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} + \frac{1\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} + \frac{-3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} = 0 \cdot 0 = 0 \; ✓$$

Άρα ο πίνακας A μπορεί να συμπληρωθεί σε ορθογώνιο

1ος τρόπος - Gram Schmidt

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\beta_2} = a_2 - \cancel{\frac{\langle \vec{a_2}, \vec{\beta_1} \rangle}{\langle \vec{\beta_1} \cdot \vec{\beta_1} \rangle}} \cdot \vec{\beta_1} = \vec{a_2}$$

άρα $\vec{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{\beta_3} = \vec{a_3} - \frac{\langle \vec{a_3}, \vec{\beta_1} \rangle}{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_1} \rangle} \cdot \vec{\beta_1} - \frac{\langle \vec{\alpha_3}, \vec{\beta_2} \rangle}{\langle \vec{\beta_2}, \vec{\beta_2} \rangle} \cdot \vec{\beta_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/14 \\ 6/14 \\ -9/14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/42 \\ 4/42 \\ -1/42 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta_3} = \begin{pmatrix} -5/42 \\ 4/42 \\ -1/42 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta_4} = \vec{a_4} - \frac{\overset{0}{\cancel{\langle \vec{a_4}, \vec{\beta_1} \rangle}}}{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_1} \rangle} \cdot \vec{\beta_1} - \frac{\overset{0}{\cancel{\langle \vec{a_4}, \vec{\beta_2} \rangle}}}{\langle \vec{\beta_2}, \vec{\beta_2} \rangle} \cdot \vec{\beta_2} - \frac{\overset{0}{\cancel{\langle \vec{a_4}, \vec{\beta_3} \rangle}}}{\langle \vec{\beta_3}, \vec{\beta_3} \rangle} \cdot \vec{\beta_3}$$

άρα $\vec{\beta_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a_4}$

$$\vec{\gamma_1} = \frac{\vec{\beta_1}}{\|\vec{\beta_1}\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma_2} = \frac{\vec{\beta_2}}{\|\vec{\beta_2}\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma_3} = \frac{\vec{\beta_3}}{\|\vec{\beta_3}\|} = \sqrt{\left(\frac{-5}{42}\right)^2 + \left(\frac{4}{42}\right)^2 + \left(\frac{1}{42}\right)^2} = \sqrt{\frac{25+16+1}{(42)^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{42}{(42)^2}} = \sqrt{\frac{1}{42}} = \frac{1}{\sqrt{42}}$$

άρα $\vec{\gamma_3} = \frac{\vec{\beta_3}}{\|\vec{\beta_3}\|} = \begin{pmatrix} -5/42 \\ 4/42 \\ 1/42 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{42} = \begin{pmatrix} -5/\sqrt{42} \\ 4/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{42} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{\gamma_4} = \frac{\vec{\beta_4}}{\|\vec{\beta_4}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & -5/\sqrt{42} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & 4/\sqrt{42} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$2^{o\varsigma}$ τρόπος

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & a_1 & \alpha_2 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{14} & \beta_1 & \beta_2 \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{14} & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix}$$ Συμπληρώνω για 3η και 4η $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta + \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma^{+0\delta} = 0 \to \alpha + \beta + \gamma^{+\delta} = 0$$

$*$

$$\frac{1}{\sqrt{14}}\alpha + \frac{2}{\sqrt{14}}\beta + \frac{(-3)}{14}\gamma^{+0\delta} = 0 \to \alpha + 2\beta - 3\gamma^{+\delta} = 0$$

$$* \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ -3/\sqrt{14} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left\{ s\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ $\qquad a = -5s$

$\beta - 4\gamma = 0$ $\qquad \beta = -4s$

$\gamma = s$ $\qquad \gamma = s$

$\delta = t$ $\qquad \delta = t$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Άρα $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} -5s \\ 4s \\ 3s \\ t \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\rangle$ ώστε συνθήκα ΟΚΒ

$\beta_{12} \quad \beta_{13} \quad \beta_{33}$

αν η άρτιος $\det B > 0$

αν η περιττός $\det B < 0$

Φυλλάδιο 6

Άσκηση 2

$< \cdot , \cdot > : R^3 \times R^3 \to R$

$< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) > = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3$

1) ορίζει εσωτερικό γινόμενο

2) $T : (R^3, < \cdot \cdot >) \to (R^3, < \cdot , \cdot >)$ ισομετρία*

Λύση

i) Συμμετρική $<\vec{x}, \vec{y}> = <\vec{y}, \vec{x}>$ (προφανές)

ii) Διγραμμική $<\vec{x} + \vec{x}', \vec{y}> = <\vec{x}, \vec{y}> + <\vec{x}', \vec{y}>$

$<\lambda\vec{x}, \vec{y}> = \lambda<\vec{x}, \vec{y}>$

για τη δεύτερη συντεταγμένη είναι συνέπεια της συμμετρικής ιδιότητας

iii) Θετικά ορισμένη $< (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) > > 0$

αν $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$

* $T(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3}{2\sqrt{3}} \right)$

$$\|(x_1,x_2,x_3)\|_{can} = \sqrt{\langle (x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle_{can}}$$
$$= \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

$$\|T(x_1,x_2,x_3)\| = \sqrt{\left\langle \left(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{\sqrt2},\frac{x_3}{2\sqrt2}\right),\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{\sqrt2},\frac{x_3}{2\sqrt2}\right)\right\rangle}$$
$$= \sqrt{4\cdot\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_1}{2}+2\cdot\frac{x_1}{\sqrt2}\cdot\frac{x_2}{\sqrt2}+8\frac{x_3}{2\sqrt2}\cdot\frac{x_3}{2\sqrt2}}$$
$$= \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

Άρα $\|(x_1,x_2,x_3)\|_{can} = \|T(x_1,x_2,x_3)\| \to T$ ισομετρία

Φυλλάδιο 7

Άσκηση 4

Εφαρμόζουμε Κριτήριο του Sylvester

$A>0 \iff \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} > 0 \to 1-a^2>0$

$1>0$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad 1-a^2-a^2>0$$

$1>0$

$a^2<1 \iff (a-1)(\alpha+1)<0$ $\quad -1 \quad 1$

$\alpha^2<1/2 \iff \left(\alpha-\frac{1}{\sqrt2}\right)\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt2}\right)<0$ $\quad -1/\sqrt2 \quad 1/\sqrt2$

$\alpha \in \left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$

Φυλλάδιο #6

Άσκηση 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

συμμετρικός

$A \in R^{3\times 3}$ $\quad A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I_{3\times 3}$

άρα A ορθογώνιος

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

Άρα από το Θεώρημα του Euler ο A παριστάνει στροφή κατά γωνία ϕ περί ενός άξονα (ε).

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -r_1 \\ r_3/-2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 \to \\ r_2 - r_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

Δεν έχω αρχική μονάδα, άρα παράμετρος

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x - y = 0 \\ z = 0 \\ y = t \end{array}$$

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in R \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Άρα ο άξονας (ε): $\left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$trA = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\varphi$

$-1 = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow$

$-2 = 2\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow$

$\boxed{\sigma\upsilon\nu\varphi = -1} \to \phi = \pi$

Συμπλήρωση το $\vec{\varepsilon_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ σε ΟΚΒ $R^{3\times 1}$

Συμπληρώνω σε βάση: $\vec{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Εφαρμόζω Gram-Schmidt

$\vec{\beta_1} = \vec{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{\beta_2} = \vec{\alpha_2} - \frac{\langle \vec{\alpha_2}, \vec{\beta_1} \rangle}{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_1} \rangle} \cdot \vec{\beta_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}/2}{1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta_3} = \vec{\alpha_3} - \frac{\langle \vec{\alpha_3}, \vec{\beta_1} \rangle}{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_1} \rangle} \cdot \vec{\beta_1} - \frac{\langle \vec{\alpha_3}, \vec{\beta_2} \rangle}{\langle \vec{\beta_2}, \vec{\beta_2} \rangle} \cdot \vec{\beta_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 - 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς $\vec{\varepsilon_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\varepsilon_2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Π): $\langle \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3} \rangle = \langle \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \quad\uparrow & \quad\uparrow \\ \varepsilon_1 & \quad\varepsilon_2 & \quad\varepsilon_3 \end{matrix} \end{array}$$